定积分及其应用
定积分的概念与性质
定积分问题引例
1.曲边梯形的面积
设函数 y=f（x）在区间[a，b]上非负且连续，由曲线 y=f（x）及直线 x = a， x = b 和 x 轴所围成的平面图形称为曲边梯形，其中曲线 y=f（x）称为曲边，x 轴上对应于区间[a，b]的线段称为底边.（如图 6.1 所示）.

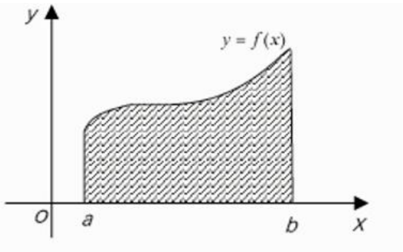


图 6.1

下面我们考虑如何计算曲边梯形的面积 A .不难发现，计算的难点在于曲边 y=f（x）是曲线，因为如果曲边改为直线，用初等几何知识即可求得其面积.这样，如何处理曲边的弯曲性就成为解决问题的关键.能否“以直代曲”呢？若在整个区间[a，b]上这样做，显然误差太大.能否将区间[a，b]分成若干个小区间，在小区间上“以直代曲”呢？由函数的连续性可知，自变量变化很小时，相应的函数值变化也很小.因此，在小区间上“以直代曲”误差会小得多，但毕竟还有误差.怎样才能获得曲边梯形面积的精确值呢？由于对区间[a，b]分割得越细，产生的面积的误差就越小，因此取极限就可获得面积的精确值.基于以上分析，我们可按如下的步骤来计算曲边梯形的面积：
第一步：分割.在区间[a，b]内任意插入 n -1 个分点：

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$$

把区间$[a,b]$分成n个小区间$[x_i, x_{i+1}]$ $(i=1,2,\cdots,n)$（称为$[a,b]$的一个分割），并分别记小区间的长度为 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ $(i=1,2,\cdots,n)$. 相应地把曲边梯形分割成n个小曲边梯形. 各个小曲边梯形的面积记为$\Delta A_i (i=1,2,\cdots,n)$.（如图 6.2 所示）

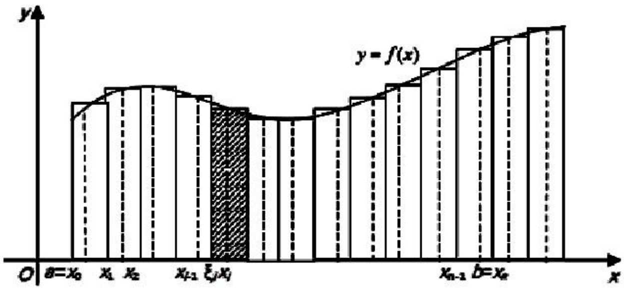


图6.2

第二步：取近似，即“以直代曲”. 在小区间$[x_{i-1}, x_i]$上任取一点ξ_i，以$f(\xi_i)$为高，Δx_i为底的小矩形面积$f(\xi_i)\Delta x_i$作为小曲边梯形面积ΔA_i的近似值，从而在$[x_{i-1}, x_i]$上以直线$y = f(\xi_i)$代替曲线$y = f(x)$，有

$$\Delta A_i \approx f(\xi_i)\Delta x_i ,(i=1,2,\cdots,n).$$

第三步：作和. 把所有小矩形面积相加，得整个曲边梯形面积A的近似值，即

$$A = \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

第四步：逼近. 显然,随着区间$[a,b]$内的分点的不断增加，第三步所得近似值的精确度将不断提高，并不断逼近曲边梯形面积A的精确值. 记最大的小区间长度为λ，即$\lambda = \max_{1 \le i \le n} \{\Delta x_i\}$，并令$\lambda \to 0$，取上述和式的极限，就得到了曲边梯形的面积

$$A = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

2.变速直线运动的路程

设物体以速度 v = v（t）作变速直线运动，现在求时刻 t = a 到 t = b 这段时间内物体经过的路程 s .

由于速度 v = v（t）随时间而变化，所以不能按匀速直线运动的情形来计算.如何处理变速是问题的关键.可以设想，在一段有限的时间区间[a，b]内速度 v = v（t）可能有较大的变化，但在很小的一段时间内，通常速度是不会有很大变化的（速度函数是连续的）.因此，在很小的时间区间上可近似看作匀速运动（以不变代变）.具体解决步骤如下：

第一步：分割. 在时间区间$[a,b]$内任意插入$n-1$个分点：

$$a=t_0<t_1<t_2\ \cdots<\ t_{i-1}<\ t_i<\cdots<t_n=b.$$

把区间$[a,b]$分成n个小区间$[t_{i-1},t_i]$（$i=1,2,\cdots,n$），并分别记小区间的长度为

$$\Delta t_i=t_i-t_{i-1}\ （i=1,2,\cdots,n）.$$

第二步：取近似， 即"以不变代变".在小区间$[t_{i-1},t_i]$上任取一点ξ_i,可近似看作物体在$[t_{i-1},t_i]$内作速度为$v(\xi_i)$的匀速运动，经过的路程$v(\xi_i)\Delta t_i$可作为$[t_{i-1},t_i]$上经过的路程Δs_i的近似值，即

$$\Delta s_i\approx v(\xi_i)\Delta t_i\ （i=1,2,\cdots,n），$$

$$s=\sum_{i=1}^{n}\Delta s_i\approx\sum_{i=1}^{n}v(\xi_i)\Delta t_i,$$

第四步：逼近. 让$[a,b]$内的分点无限增加，令最大的小区间长度$\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta t_i\}\to 0$，则上述和式的极限就是作变速直线运动的物体从$t=a$到$t=b$这段时间内经过的路程$s$，即

$$s=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}v(\xi_i)\Delta t_i\ .$$

以上两个问题，一个是几何问题，一个是物理问题，具体内容虽然不同，但在处理问题的过程中所遇到的困难及克服困难所用的方法都是完全一样的.问题的结果，从数量上看，最终都归结为求"和式"的极限.事实上，在各个科学领域中还有许多量需要采用类似的方法去计算.例如，曲线段的长度，旋转体的体积，变力作功以及经济学中的某些量等，对这些量的计算在数量上最终都归结到与上述两例相同形式的和式极限的计算问题.这样在数学上需要建立一个数学模型，从而产生定积分的概念.

定积分的概念

定义 1 设函数$f(x)$是定义在区间$[a,b]$上的有界函数.在$[a,b]$中任意插入$n-1$个分点：

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_n=b,$$

将区间$[a,b]$分成n个小区间$[x_{i-1},x_i]$（$i=1,2,\cdots,n$）.小区间的长度分别记为$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$（$i=1,2,\cdots,n$）.在小区间$[x_{i-1},x_i]$上任取一点ξ_i，作乘积$f(\xi_i)\Delta x_i$的和式

$$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i,$$

若当$\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}\to 0$时，上述和式的极限存在，且与区间$[a,b]$的分法无关，与点$\xi_i$的取法无关，则称此极限值为函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的定积分，记为$\int_a^b f(x)dx$.即

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i,$$

其中$\int_a^b$称为定积分号，x称为积分变量，$f(x)$称为被积函数，$f(x)\,dx$称为被积表达式，$[a,b]$称为积分区间，a称为积分下限，b称为积分上限.

根据定积分的定义，前面所讨论的两个实际问题分别表述如下：

曲边梯形的面积可写为　$A=\int_a^b f(x)dx$；

变速直线运动的路程为　$s=\int_a^b v(t)dt$.

关于定积分的定义，还应注意以下几点：

（1）定积分是一种和式的极限，其值是一个确定的实数，它的大小与被积函数 f （x）和积分区间[a，b]

有关，而与积分变量用哪个字母表示无关.即

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du \ .$$

（2）定积分是一个确定的数值，而不定积分是一族函数，这是定积分与不定积分的本质区别.

（3）在定积分的定义中，规定了 a<b.如果 a≥b，补充规定：

当 $a = b$ 时，$\int_a^b f(x)dx = \int_a^a f(x)dx = 0$；

当 $a > b$ 时，$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

（4）如果函数 f（x）在区间[a，b]上的定积分存在，即和式的极限存在，就说 f（x）在区间上[a，b]是可积的.怎样的函数才可积呢？要求和式的极限存在，且与区间的分法和点 i 的取法无关，这样一个和式极限问题讨论将是很复杂的.为此仅给出下面定理，不要求证明.

定理 1　函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积的必要条件是 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界.

定理 2　若 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

定理 3　若 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界,且在 $[a,b]$ 上除有限个间断点外连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

例 1　试证明 $\int_a^b A dx = A(b-a)$，其中 A 为常数.

证明　由定积分的定义，$f(x) = A$ 是常数，积分和式为

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} A\Delta x_i = A\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i = A(b-a),$$

故

$$\int_a^b A dx = \lim_{\lambda \to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = A(b-a).$$

定积分的几何意义

若在 $[a,b]$ 上 $f(x) \geq 0$，则 $\int_a^b f(x)dx$ 的值表示以 $y = f(x)$ 为曲边，与直线 $x = a, x = b$ 和 $y = 0$ 所围曲边梯形的面积 A，即 $\int_a^b f(x)dx = A$．（如图 6.3）

若在 $[a,b]$ 上 $f(x) \leq 0$，则 $\int_a^b f(x)dx$ 为负值，其绝对值表示以 $y = f(x)$ 为曲边，与直线 $x = a, x = b$ 和 $y = 0$ 所围曲边梯形的面积 A，即 $\int_a^b f(x)dx = -A$．（如图 6.4）

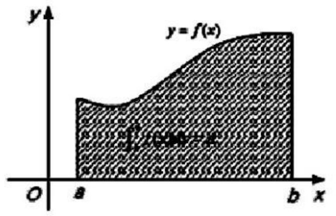


图 6.3

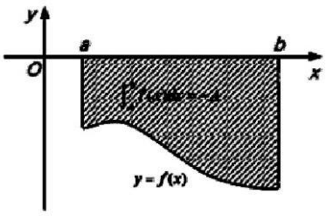


图 6.4

若在 $[a,b]$ 上 $f(x)$ 有时正有时负，则 $\int_a^b f(x)dx$ 的值表示由曲线 $y = f(x)$ 和直线 $x = a, x = b$，$y = 0$ 所围图形在 x 轴上方的面积减去在 x 轴下方的面积所得之差，即

$$\int_a^b f(x)dx = A_1 - A_2 + A_3 . \text{（如图 6.5）}$$

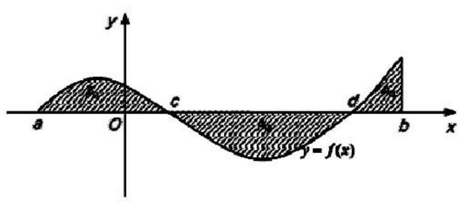


图 6.5

注意：定积分的几何意义有两方面的应用

（1）利用面积求定积分；

（2）利用定积分求（或表示）面积：

若在[a，b]上 f （x）≥0 （如图6.3），则曲线 y = f （x）和直线x = a， x = b，y = 0所围图形面积为

$$A=\int_a^b f(x)dx;$$

若在[a，b]上 f （x）≤0 （如图6.4），则曲线 y = f （x）和直线x = a， x = b，y = 0所围图形的面积为

$$A=-\int_a^b f(x)dx;$$

若在[a，b]上 f （x）有时正有时负（如图6.5），则曲线 y = f （x）和直线x = a， x = b，y = 0所围图形的面积A 就是曲线在x 轴上方的定积分减去在x 轴下方的定积分所得之差，即

$$A=\int_a^c f(x)dx-\int_c^d f(x)dx+\int_d^b f(x)dx.$$

例 根据定积分的几何意义，求$\int_0^1 xdx$.

解 由于在区间[0,1]上，$f(x)=x\geqslant 0$（见图6.6），因此根据定积分的几何意义，$\int_0^1 xdx$表示由“曲边”$y=x$和直线$x=0,x=1,y=0$所围图形的面积，该图形是底为1，高为1的直角三角形，

故 $$\int_0^1 xdx=\frac{1}{2}\times 1\times 1=\frac{1}{2}.$$

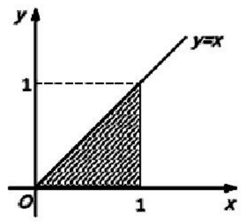


图6.6

定积分的性质

性质1 $\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$；（$k$为常数）

性质2 $\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx$；

这一结论可以推广到任意有限多个函数代数和的情况.

性质3 对任意的实数c，有$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$；

这一性质说明定积分具有可加性.不管c在[a，b]内，还是在[a，b]外，这一性质都成立.

性质4 若在区间$[a,b]$上$f(x)\equiv 1$，则$\int_a^b dx=b-a$；

性质5 若函数$f(x),g(x)$在区间$[a,b]$上满足$f(x)\leqslant g(x)$，则

$$\int_a^b f(x)dx\leqslant\int_a^b g(x)dx;$$

性质 6 若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的最大值与最小值分别为 M 和 m，则

$$m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)dx\leqslant M(b-a)\text{；}$$

性质 7（积分中值定理） 若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，则在 $[a,b]$ 上至少存在一点 ξ，使得

$$\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)\quad(a\leqslant\xi\leqslant b).$$

这一性质的几何意义是：由曲线 $y=f(x)$ 和直线 $x=a,x=b,y=0$ 所围成的曲边梯形面积等于以 $f(\xi)$ 为高，$b-a$ 为底的矩形的面积，如图 6.7. 其中 $f(\xi)=\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ 称为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的平均值.

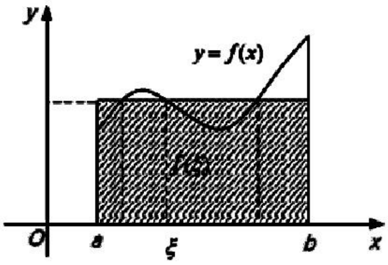
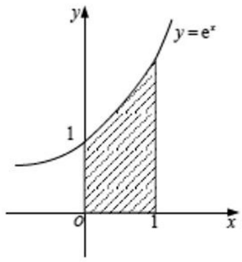


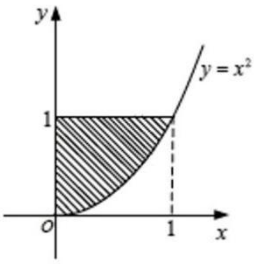
图 6.7

例 试用定积分表示下列图中阴影部分的面积（如图 6.8）



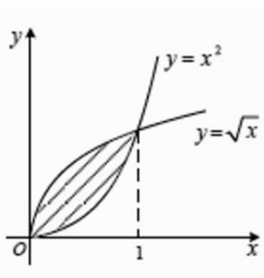
(1)

解（1）$A=\int_0^1 e^x dx$.



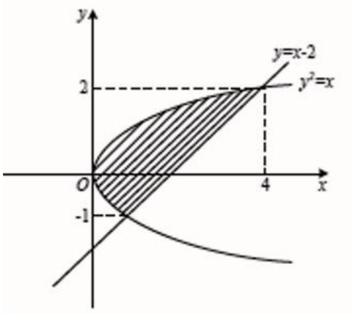
(2)

（2）$A=\int_0^1 dx-\int_0^1 x^2 dx$.



(3)

（3）$A=\int_0^1 \sqrt{x}dx-\int_0^1 x^2 dx$.



（4）

（4） $A=(\int_0^1\sqrt{x}dx-\int_0^1-\sqrt{x}dx)+[\int_1^4\sqrt{x}dx-\int_1^4(x-2)dx]$，或 $A=\int_{-1}^2(y+2)dy-\int_{-1}^2 y^2dy$.

例 4 比较定积分 $\int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}dx$ 与 $\int_0^1 \mathrm{e}^{\sqrt{x}}dx$ 的大小

解　当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，　$x^2\leqslant\sqrt{x}$，故 $\mathrm{e}^{x^2}\leqslant\mathrm{e}^{\sqrt{x}}$，

根据定积分的性质 5，有　$\int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}dx\leqslant\int_0^1 \mathrm{e}^{\sqrt{x}}dx$.